Gitarın Matematiği-2

Prof. Dr. Erhan Güzel (İstanbul Kültür Üniversitesi)

Kromatik Gam Grubu

Şimdi, frekansı $2^{2/12}$ olan "re" yi göz önüne alalım. Bu "re" ye göre bir oktav daha ince olan nota ilkine göre frekansı iki kat olan "re" notasıdır, yani

$2x2^{2/12} = 2^{2/12+1} = 2^{14/12}$

dir. Buna göre, 2 ile 14 aynı adlı bir notaya, yani "re" ye karşı gelir. Benzer biçimde, 4 ile 16 arasındaki fark 12 olduğundan, 4 ile 16 "mi" adlı notaya kaşı gelir. Başka bir deyişle,12 ile bölündüklerinde ayı kalanı bırakan sayılar için aynı adlı nota elde edilir. Böylece, örneğin 5, 17, 29, 41 sayılarının 12 ile bölünmesinde kalan hep 5 olduğundan, bu sayılar frekansları birbirinden farklı olan "fa" adlı notalara karşı gelir. Buna göre bir notanın adı 0 ile 11 arasındaki bir tam sayı ile gösterilebilir. Böylece, örneğin tüm "si" ler 11 ile gösterilebilir ve diğerleri için benzer bir gösteriliş geçerlidir.

Şimdi, müzisyenlerin "transpozisyon" adını verdikleri notaların ikişer ikişer toplamına geçebiliriz. Örneğin,

3+2 = 5 (3 yarım ton + 2 yarım ton = 5 yarım ton,yani mi bemol+2 yarım ton = fa)

6+6 = 0 (6 yarım ton + 6 yarım ton = bir oktav ,yani fa diyez+ 6 yarım ton = do)

9+5 = 2 (9 yarım ton + 5 yarım ton = bir oktav , yani la + 5 yarım ton = re)

Buna göre, G nin elemanları arasındaki bu toplama işlemine göre ""toplam tablosu aşağıdaki gibidir:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Bu tablo, iki sayının 12 ile bölümünden elde edilen kalanlara göre bu iki sayının toplamının 12 ile bölümünde ortaya çıkan kalanı veriyor. Matematikte bu tabloya 12 modülüne göre kalan sınıflar kümesinin (**Z_{12} kalan sınıflar grubunun**) toplam tablosu denir.

Matematikçiler, G kümesinin bu toplama işlemine göre bir grup olduğunu söylüyor. Özellikle, G nin her x elemanının bir y tersinin var olduğu görülebilir, bu y elemanı x ile toplandığında 0 elde edilir. Örneğin 10, 2 nin tersidir ve 6 nın tersi kendisidir.

Müzisyenler bu durumu şu şekilde tercüme eder: "si bemol, re nin tersidir ve fa diyezin tersi kendisidir"

Alt Gruplar ve Akortlar

Müzisyenler bu grubun başka bir özelliğini de kullanırlar; alt gruplara sahip olma özelliği, yani G deki toplama işlemine göre kapalı olan P alt kümelerinin varlığı (P nin iki elemanın toplamı gene P nin bir elemanıdır. Bu durumda P alt kümesi toplama işlemine göre bir gruptur). Buna göre G nin alt grupları aşağıdaki gibidir:

G (G nin kendisi G nin bir alt kümesidir),

P_a={0},

P_b={0, 6},

P_c={0, 4, 8},

P_d={0, 3 , 6, 9},

P_e={0, 2, 4, 6, 8, 10}

Bu alt kümelerin birer alt grup olduğu, işlem tablosu yardımıyla kolaylıkla kontrol edilebilir. Örneğin, P_d nin toplam tablosu aşağıdaki gibidir:

+	0	3	6	9
0	0	3	6	9
3	3	6	9	0
6	6	9	0	3
9	9	0	3	6

Müzisyenler G nin bu alt gruplarını akortlar için kullanıyorlar. Bu alt gruplara karşı gelen akortlar aşağıdaki gibidir:

P_a: do

P_b: triton (do, fa diyez)

P_c: beşli artık akort (do, mi, sol diyez)

P_d: yedili eksik akort (do, mi bemol, fa diyez, la)

P_e: tonlara göre gam (do, re, mi, fa diyez, sol diyez, si bemol)

Gitar hâlâ elinizde ise bütün bu alt kümeler için notaları inceden kalına sonrada kalından inceye çalabilirsiniz.

Majör Gamlar

Mademki başladınız çok iyi bilinen şu gamı çalınız: do, re, mi, fa, sol, la, si…

Bu G nin başka bir alt kümesine karşı gelir:

P_0 ={0, 2, 4, 5, 7, 9,11}

Bir müzisyen için P_0, "do majör" tonalitedir. Şimdi P_0 ın her elemanına 1 ekleyelim (müzisyen deyişiyle yarım ton transpoze yapalım) :

P_1 = {1, 3, 5, 6, 8,10, 0}

elde edilir. Bu da "do diyez majör" tonalitedir. Benzer biçimde devam edilirse,

P_2 = {2, 4, 6, 7, 9, 11,1}

"re majör", P_3 "mi bemol majör" tonaliteler gibi müzik dilinin on iki majör gamı elde edilir. Şaşırtıcı olan, hepsinin birbirinden farklı olasıdır. Birbirine en yakın olanlar, yedi notadan altısının ortak olduğu P_0 "do majör" gamı ile P_7 "sol majör" gamıdır. Birbirine en uzak olanlar ise, P_0 ve P_1 gibi sadece iki ortak nota içerir. Dinleyince, birbirine yakın olan gamlar arasında geçişin daha kolay olduğu anlaşılır.

Ancak bu kez, söz konusu gamlar matematikten ödünç alınmamıştır. Zaten, P_0 dan P_{12} ye bu alt kümeler matematiksel olarak daha az ilginçtir, çünkü bu kümeler toplama işlemine göre kapalı değildirler. Örneğin, P_0 ın 2 ve 4 elemanlarının toplamı olan 8, P_0 ın bir elemanı değildir.

Bu durum dikkate alındığında, matematiğin en azından müzik konusunda daha alçak gönüllü olması gerektiği ortaya çıkıyor, Matematik müzikte önemli bir etken olsa da tek etken değildir.

Kaynakça

1- Gardner,Fox,Jeffery,Knowlws (1996). "Improves Reading and Math Performance" Nature May:23

2- http://udes.iku.edu.tr ,**UDES** - Cebir I, İstanbul Kültür Üniversitesi,Matematik-Bilgisayar Bölümü

3- Laborde Jean Benjamin, Essais Sur Le Musique Andenne et Moderne, C.I.,Paris 1780.

4- Tangente,*le magazine des mathématiques*,Hors-série n° 11 (2005) BP 214-90506 Argenteuil cedex France

CBT 1243 / 14 | 14 Ocak 2011