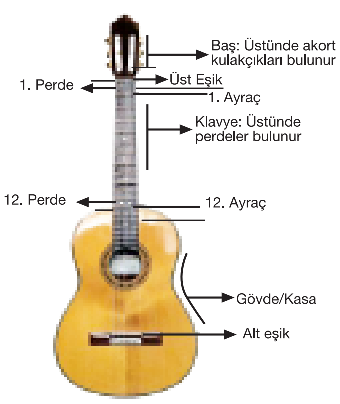
Gitarın Matematiği

Bir oktavı mümkün olan en düzenli biçimde 12 yarım tona bölmek, matematikte çok iyi bilinen Z_{12} kalan sınıflar grubuna karşı gelir. Bu grubun esasları müzisyenler tarafından da iyi bilinmektedir. ***Prof. Dr. Erhan Güzel*** **(İstanbul Kültür Üniversitesi)**

İlk olarak çalmaya uygun durumda olan bir gitarı inceleyelim. Gitarda *klavye* denilen sap üzerinde yan yana dizilmiş metal ayraçlar göreceksiniz. O ayraçların arasındaki boşluklara *perde* deniyor. Sol elin bir parmağını (örneğin, işaret parmağını) klavye üzerinde bir perdede bir tele basın, bu yer ile alt eşik arasında herhangi bir yerinde sağ elin bir parmağıyla (örneğin, başparmakla) aynı tele vurun. Ne oluyor? Bu şekilde uyarılan tel bir ses meydana getiriyor; bu ses eşik ile tele sol elinizle bastığınız yer arasında ortaya çıkan titreşimden kaynaklanıyor. Sol elimizin işaret parmağıyla bastığımız yeri değiştirince ne oluyor? Parmağınız aynı perdede kaldığında hiçbir şey, değişmez elde edilen ses hep aynı kalır. Fakat sol elin bir parmağını başka bir perdeye basarsanız ses değişecektir: Eğer parmağınızı klavye üzerinde daha aşağıdaki bir perdeye bastıysanız daha ince bir ses çıkacak, daha yukarıdaki bir perdeye bastıysanız daha kalın bir ses çıkacaktır. Aslında sesin yüksekliği telin titreşim frekansına, yani bir saniyedeki titreşim sayısına bağlıdır. Bu frekans telin uzunluğu ile ters orantılıdır: f = frekans, l= telin uzunluğu, C= tele (telin üretildiği madde, telin gerilmesi vb.) ve seçilen birimlere bağlı bir sabit olmak üzere f = C/l dir. Frekansı f olan ilk ses ile frekansı f' olan ikinci ses arasındaki aralık, bu frekansların oranlarına bağlıdır. Başka bir deyişle bir aralığın değeri f/ f' oranıyla karakterize edilir. Eğer ikinci ses birinci sesten daha ince ise, bu oran 1 den küçüktür; aralık ne kadar büyükse bu oran 1'den o kadar küçük olacaktır.



Gitar üzerinde birinci sesi veren telin uzunluğu l ve ikinci sesi veren telin uzunluğu da l' olsun. Bu durumda f=C/l ve f'=C/ l' olduğundan, söz konusu aralığın değeri l/ l' oranıyla karakterize edilir.

Şimdi teli serbest bırakarak elde edilen ses ile 12. perdeye basarak elde edilen sesi karşılaştıralım. İkinci ses birincisinden, müzisyenlerin deyimiyle bir "oktav" daha incedir. Yani,12. ayraç serbest olan telin ortasındadır. Gerçekte, alt eşik yerinden oynasa ya da kaybolsa bile telaşlanmaya gerek yok, çünkü alt eşiği yerine koymak için bu özellik kullanılır: Buna göre alt eşiğin yeni durumu üst eşiğin 12. ayraca göre simetriğidir. Buna göre oktav için uzunlukların oranının 2 olduğu sonucuna varılır.

n. ayraç ile alt eşik arasında kalan tel uzunluğunu l_n ile gösterilsin. Bu durumda, $l_{12}= l_0 /2$' dir. Şimdi l_0, l_1, l_2,… uzaklıklarını ölçelim ve l_0/ l_1, l_1/ l_2 , l_2/ l_3 , … oranlarını hesaplayalım. Bu oranların birbirine eşit oldukları görülür; her biri "yarım ton"dur. Bir "yarım ton"a karşı gelen k oranını belirleyelim:

$l_0=k\, l_1,\ l_1=k\, l_2\ ,\ l_2=k\, l_3,\ \dots\ ,\ l_{11}=k\, l_{12}$

olduğuna göre,

$l_0=k^2\, l_2\ ,\ l_0=k^3\, l_3,\ \dots\ ,\ l_0=k^{12}\, l_{12}$

dır. Burada, $l_{12}= l_0/2$ olduğunu bildiğimize göre k=2 elde edilir. Buna göre $k=\sqrt[12]{2}$ dir.

Cebirsel Yapı

Gitar üzerinde yapılan inceleme sonuçlarının matematikte temel yapılardan biri ile "ölçülü bir ilişki içinde" olduğu görülür. Bu nedenle söz konusu yapı hakkında çok kısa bir bilgi vermekte yarar var.

Boş olmayan bir G kümesi üzerinde "*" gibi bir **ikili işlem** (kısaca **işlem**) tanımlı ise, yani G nin her a,b elemanı için a*b, G'nin bir elemanı ise matematikçiler G kümesinin "*" işlemine göre "kapalı" olduğunu söylüyorlar ve G'ye bu işleme göre bir **cebirsel yapı** adını veriyorlar. Örneğin, Z tamsayılar kümesi toplama ("+") ve çapma ("x") işlemlerine göre birer cebirsel yapıdır. Çünkü her a,b tamsayısı için a+b ve axb birer tamsayıdır, yani tamsayılar kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

Matematikçilerin **grup** adını verdikleri cebirsel yapı cebirin temel yapılarından biridir.

Üzerinde aşağıdaki özellikleri taşıyan bir "*" işlemi tanımlanmış bir G cebirsel yapısına, "*" işlemine göre **grup** adı veriliyor:

Birleşme: G'nin her a,b,c elemanı için a*(b*c) = (a*b) *c dir.

Birim Eleman: G'nin her a elemanı için a*e=e*a olacak biçimde G nin bir e elemanı vardır.

Ters Eleman: G'nin her a elemanı için a*x=x*a=e olacak biçimde G'nin bir x elemanı vardır.

Bu özelliklere ek olarak, G'nin her a,b elemanı için a*b=b*a ise *G* kümesi "*" işlemine göre **değişmeli grup** adını alıyor.

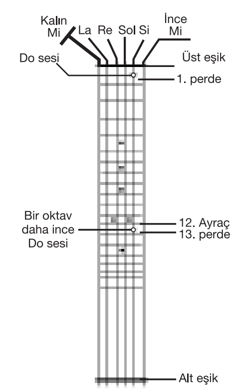
Örneğin, Z tamsayılar kümesi ve Q rasyonel sayılar kümesi toplama "+" işlemine göre birer değişmeli gruptur. Çünkü a, b, c herhangi üç tamsayı (ya da rasyonel sayı) olmak üzere a+(b+c)=(a+b)+c'dir, 0 tamsayısı (ya da rasyonel sayısı) toplama işlemine göre birim elemandır, her a tamsayısının (ya da rasyonel sayısının) toplama işlemine göre tersi –a tamsayısıdır (ya da rasyonel sayısıdır) ve her a,b tamsayısı (ya da rasyonel sayısı) için a+b=b+a'dır.

G'nin boş olmayan bir A alt kümesi, G üzerinde tanımlı olan işleme göre bir grup ise, A ya G'nin bir **alt grubu** deniyor. Örneğin, Z tamsayılar kümesi Q rasyonel sayılar kümesinin toplam grubunun bir alt grubudur. Matematikçiler problemlerini çözerken mümkün olan en kısa yolu tercih ettiklerinden, bir alt kümenin bir alt grup olup olmadığını göstermek için gerçeklenmesi gereken özelliklerin sayısını bire indirebiliyor. Özel olarak G bir sonlu bir küme ise, A alt kümesinin bir alt grup olduğunu göstermek için, matematikçiler aşağıdaki iddiayı ispat ederek işlerini kolaylaştırıyorlar:

"G sonlu bir küme ise, G'nin boş olmayan bir A alt kümesinin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul A nın G'deki işleme göre kapalı olmasıdır"

Kromatik Gam

Tekrar gitarımıza dönelim ve gitarımızı, sol el klavyeye ve sağ el gövdeye gelecek biçimde tutalım. Bu durumda gitar üzerinde, serbest durumda sırasıyla *kalın mi, la, re, sol, si* ve *ince mi* sesi veren 6 tel bulunur. İnce mi teli kalın mi telinden tam bir oktav ince ses verir. Her bir tel için, serbest durumda elde edilen ses,12. perdeye basıldığında elde edilen sesten tam bir oktav kalındır.



Şimdi bir nota ele alalım, örneğin bir "do" sesi elde edelim. Bunun için, örneğin serbest durumda si sesi veren telde sol elimizin işaret parmağı ile birinci perdeye bastığımızda "do" sesi elde edilir. Elde edilen sesin frekansını 2 ye katlarsak yani aynı telde 13. perdeye basarsak ilk sese göre bir oktav daha ince bir ses elde edilir ve bu ses ilkine o kadar çok benzer ki buna da "do" denir. Her tel üzerinde bir "do"dan diğerine, her oktav mümkün olduğunca birbirine eşit 12 parçaya bölünmüştür. Bu iyi tampere edilmiş klavyedir. ("İyi Tampere Edilmiş"den kasıt, tüm tonlarda çalıp beste yapılmasını sağlayan, 1645-1705 yılları arasında yaşamış Alman müzisyen Andreas Werckmeister'in 1691 yılında geliştirdiği bir akort sistemidir.)

Bir "*do*"dan diğerine giden oktavı 12'ye bölmek ne demektir? Bu seçilen frekansların aralığının aritmetik bölümü değil, geometrik bölümüdür. Açıkçası bir notadan diğerine mümkün olduğu kadar düzgün bir biçimdeki geçişte frekansa aynı değer eklenmiyor fakat frekans aynı değer ile çarpılıyor.

Pratikte, birim olarak elde edilen ilk "*do*" nun frekansı alınırsa, (bu notaya 1 frekansı karşı getiriliyor)sonraki "do" için 2 frekansı elde edilir. Bu iki "do" arasında bir notadan, yarım ton daha ince olan bir sonrakine geçişte frekans 2'nin 12. kökü ($2^{1/12}$) ile çarpılıyor. Yani, yapılan şu:

Do (başlangıç) : $2^0= 1$ ➽ do diyez: $2^{1/12}$ ➽ re : $2^{2/12}$ ➽ mi bemol : $2^{3/12}$ ➽ mi : $2^{4/12}$ ➽ fa : $2^{5/12}$ ➽ fa diyez: $2^{6/12}$ ➽ sol : $2^{7/12}$ ➽ sol diyez : $2^{8/12}$ ➽ la : $2^{9/12}$ ➽ si bemol: $2^{10/12}$ ➽ si : $2^{11/12}$ ➽ do : $2^{12/12} = 2$

Kolaylıkla ve daha çabuk yol almak için, her notayı kendisine karşı gelen $2^{n/12}$ yazılışındaki n sayısı ile gösterelim. Buna göre, örneğin "mi" ($2^{4/12}$) 4 ile ve "sol" ($2^{7/12}$) 7 ile gösterilir. Böylece,

G = {*do, do diyez, re, mi bemol, mi, fa, fa diyez, sol, sol diyez, la, si bemol, si*}

biçiminde olan **kromatik gam**

G = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} biçiminde yazılır.

YAZININ DEVAMI HAFTAYA