Yayın Adı : Cumhuriyet Bilim Teknoloji | Periyod : Haftalık | Tarih : 15.05.2015
Ili : Istanbul | Sayfa : 13 | Tiraj : 60.237 | 1/1

BİLİM KÜLTÜR VE EĞİTİM

Kök...

"Az gittik uz gittik. Dere tepe düz gittik. Bir de dönüp baktık ki bir arpa boyu yol gitmişiz"

Prof. Dr. Erhan Güzel
erhan.guzel@iku.edu.tr
(İstanbul Kültür Üniversitesi)

Arkeolojik kazılar ve gözlenen ilkel kavimler dikkate alındığında, ilk bulunan sayının "çok" olduğu, sonra 2 nin, daha sonrada 1 in bulunmuş olabileceği tahmin ediliyor. Ancak en zor bulunan 0 (sıfır) dır. 0 sayısı İ.S. 7. yüzyılda Hindistan da (sıfır ile Budizm de Nirvana'ya ulaşmak arasındaki ilişkiyi incelemek ilginç olabilir.) kullanılmaya başlanmıştır.

Oldukça erken çağlarda, insanlar aynı cins nesneleri karşılaştırarak, büyüklüklerini ölçerek ve aralarında oranlar kurarak matematiğe başlamışlardır. Kemik üzerine, kum üzerine çizerek ya da, ipe düğüm atarak bir büyüklüğü belirtmeye çalışmışlardır.

Toplumsal yaşamın gerektirdiği matematiksel gelişme belirli bir düzeye eriştikten sonra, matematik sadece uzmanların anlayabildiği bir meta haline geldi; İnsanlar olgularla yetinmeyip ispata yöneldiler. İspat etmenin ön plana çıkması ile matematik ve dolayısıyla bilim ve teknoloji günümüzdeki gelişmişlik düzeyine ulaştı.

DENKLEM ÇÖZMEK

Denklem, iki niceliğin eşitliğini gösteren bağıntıdır. Araya "=" işareti konularak ifade edilir. Denklemlerde eşitlik değişkenin belirli değerleri için sağlanır. Örneğin,
$x-1=0$, $x+1=0$, $2x+3=4$, $x^2+2=0$, $x^2-3x+2=0$

birer denklemdir. Her denklemde x bilinmeyeni yerine yazdığımızda eşitliği sağlayan sayıya denklemin kökü adını veriyoruz. Örneğin x=1 birinci denklemin köküdür, x=1 ve x=2 son denklemin kökleridir. Bir denklemin köklerini bulduğumuzda denklemi çözmüş oluruz.

Denklemler konusunda ilk önemli adımların Babilliler tarafından atıldığı bilinmektedir. Bu konudaki en eski yazılı belge ise İ.Ö. 1700'den önce yaşadığı sanılan Mısırlı Ahnes'in çalışmalarını içeren Rhind Papirüsü' dür. Rhind Papirüsü'nde çeşitli birinci derece denklemlerin çözümü yer alır. Sonraki yüzyıllarda, önce Yunan ve Mısır, daha sonra da İslam ve Hint matematikçileri denklemlere ilgi duymuş ve kimi özel ikinci derece denklemlerin çözümlerini bulmuşlarsa da, soyut bir denklemler kuramı anlayışını yakalamakta pek başarılı olamamışlardır. Bu dönemlerin en ilgi çekici yapıtları arasında İskenderiyeli Diophantos'un Arithmetike'si (İ.S.200), Hintli Brahmagupta (630) ve Bhaskara'nın (1150) yapıtları ve Arap matematikçi Harizmi'nin Hisabü'l-cebr ve'l-mukabele (825) adlı yapıtı sayılabilir. 13. ve 14. yüzyıllarda İslam matematikçilerinin yapıtlarının çevirileriyle, özellikle de İtalyan Leonardo Pisano'nun Liber abaci (1202; Abaküs Kitabı) adlı kitabıyla Hıristiyan Batı'da tanınmaya başlayan denklemlerin genel bir kurama dayandırılmasını sağlayacak ilk önemli adımlar 15. ve 16. yüzyılda İtalyan matematikçiler tarafından atılmıştır. x^3+ax-b biçimindeki üçüncü dereceden denklemlerin genel çözümünü bulan Scipione dal Ferro, Niccolò Tartaglia ve Lodovico Ferrari Ars magna (1545; Büyük Sanat) adlı yapıtında Ferro'nun üçüncü dereceden denklemlere ilişkin buluşlarının yanı sıra Ferrari'nin dördüncü dereceden denklemlerin çözümüne ilişkin çalışmalarından da yararlanan Gerolamo Cardano, sözü geçen dönemin en önemli matematikçileri arasında yer alırlar.

SAYI KÜMELERİ

Aslında, matematiğin kısa tarihçesi dikkate alındığında ilk matematikçinin, koyunlarını saymaya çalışan bir çoban olması ihtimali var. Bir şeyleri sayma ihtiyacı nedeniyle, sayılara gereksinim duyulmuştur. "Saymak" fiilini gerçekleştirmek için doğal olarak, **N** ile gösterdiğimiz **Doğal Sayılar** kümesinin tanımlanması gerekmiştir.

Sonsuz elemanlı **N** = {1,2,3,4,...} doğal sayılar kümesi Peano aksiyomları ile tanımlanır. (Bkz. CBT. Sayı 1404, Sayfa 13). Buna göre $x-1=0$, $2x+2=4$ gibi denklemleri doğal sayılar kümesi içinde çözmek mümkündür. Ancak, örneğin $x + 1 = 0$ biçimindeki bir denklemi **N** doğal sayılar kümesi içinde çözmek mümkün değildir, çünkü bu denklemin kökü olan -1 sayısı bir doğal sayı değildir. Bu nedenle **N** kümesi genişletilerek **Z** tamsayılar kümesine geçilmesi gerekmiştir. Basit bir ifadeyle, **N** doğal sayılar kümesine 0 ve her doğal sayının toplama işlemine göre tersi, yani -1, -2,-3,-4,... sayılar eklenerek **Z**= {...,-4,-3-2,-1,0,1,2,3,4,...} tamsayılar kümesine geçildiği söylenebilir. Ancak matematikçiler bu geçişi böyle basit bir biçimde yapmazlar. **Z** tamsayılar kümesinde her sayı sonsuz elemanlı bir kümedir ve 0,1,-1... gibi sayılar bu ayrık, yani hiçbir ortak sayı içermeyen kümelerin temsilcileridir. Burada ilginç olan, sonsuz elemanlı **Z** tamsayılar kümesi ile **N** doğal sayılar kümesinin denk, yani aynı sayıda eleman içeren kümeler olmalarıdır.

$2x + 1 = 0$ biçimindeki bir denklemi **Z** doğal sayılar kümesi içinde çözmek mümkün olmadığından, **Z** genişletilerek **Q** rasyonel sayılar kümesine geçilmiştir. Burada da yukardakine benzer bir durum vardır.

$$Q=\left\{\ldots,-\frac{125}{2},\ldots,-15,\ldots,-1,\ldots,-\frac{1}{2},\ldots,0,\ldots,\frac{1}{2},\ldots,1,\ldots,\frac{125}{2},\ldots\right\}$$

Rasyonel sayılar kümesinde her rasyonel sayı sonsuz elemanlı bir kümedir. Rasyonel sayılar kümesi daha formel olarak

$$\mathbf{Q} = \{a/b \; ; \; a,b \in \mathbf{Z}, \; b \neq 0\}$$

biçiminde yazılır. Buna göre tamsayılar kümesi, rasyonel sayıların kümesinin bir has alt kümesi olarak,

$$\mathbf{Z} = \{a/1 \; ; \; a \in Z\}$$

biçiminde yazılabilir. Ancak ninelerimizin anlattıkları; bugün daha az anlatılır olan masallara başlarken dedikleri gibi: "Az gittik uz gittik. Dere tepe düz gittik. Bir de dönüp baktık ki bir arpa boyu yol gitmişiz" misali, doğal sayılara sonsuz sayıda sayı ekleyerek tamsayılara ve tamsayılara sonsuz sayıda sayı ekleyerek rasyonel sayılara geçilmesine rağmen, rasyonel sayılar kümesi ile **N** doğal sayılar kümesi denk, yani aynı sayıda eleman içeren kümelerdir!

Dikkat edilirse $x^2 - 2 = 0$ biçimindeki bir denklemi **Q** rasyonel sayılar kümesi içinde çözmek mümkün değildir. Çünkü Pisagor döneminden buyana bilindiği gibi bir rasyonel sayı değildir. Dolayısıyla **Q** rasyonel sayılar kümesi genişletilerek **R** reel sayılar kümesine geçilmesi zorunluluğu ortaya çıkmıştır. **R** reel sayılar kümesi de sonsuz bir kümedir. Ancak buradaki sonsuzluk farklıdır. Doğal sayılar, tamsayılar ve rasyonel sayılar sayılabilir sonsuz kümeler olmalarına rağmen reel sayılar kümesi sayılamaz sonsuz bir kümedir. İlginç olan bir başka önemli özellik ise, reel sayıların sayısının, 0'dan kesin olarak büyük ve 0,1'den kesin olarak küçük reel sayıların sayısı kadar olmasıdır!

Son olarak, $x^2 + 1 = 0$ biçimindeki bir denklemi **R** reel sayılar kümesi içinde çözmek mümkün olmadığından, **R** genişletilerek **C** karmaşık sayılar kümesine geçilmiştir.

Bu geçişlerin teorik olarak nasıl yapıldığı üniversitelerin matematik bölümlerinde okutulan cebir derslerinin temel konusudur; Amaç, bildiğimiz sayı (**Z** tam sayılar, **Q** rasyonel sayılar, **R** reel sayılar, **C** karmaşık sayılar) kümelerinin ne tür cebirsel yapılar olduklarını ve özelliklerini açıklamak, bu kümelerin birinden diğerine geçişte kullanılan mantığı teorik olarak anlamaktır.

Bu son aşamada, yani **C** ye gelindiğinde , "Cebrin Esas Teoremi" ile matematikçiler rahat bir nefes alabilmiştir. Teoremin açık bir ifadesi şöyledir:

Katsayıları karmaşık olan ve sabit olmayan tek değişkenli her polinomun en az bir (karmaşık) kökü vardır.

Yani n, 1 den büyük bir doğal sayı ve $a_0, a_1, \ldots a_n$ karmaşık sayılar olmak üzere herhangi polinomunun (ya da $f(x)=0$ denkleminin)

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

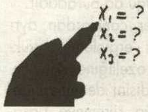
en az bir karmaşık kökü vardır. Ancak var olduğunu bildiğimiz kökleri bulmak günümüzde bile büyük bir problem olarak karşımızda durmaktadır. Örneğin n = 2 için denklemin köklerinin, ortaöğretim sırasında öğrendiğimiz gibi

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

olduğunu biliyoruz. Köklerin bu şekilde bulunmasına $f(x) = 0$ denkleminin radikallerle çözümü diyoruz. Ancak n büyük ya da eşit 5 olduğunda $f(x)=0$ denklemini radikallerle çözmenin mümkün olamadığı ispatlanmıştır.

Matematiğin teorik olarak kat ettiği yol

$$7x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{27}{11} = 0$$



dikkate alındığında bir denklemin köklerini bulma noktasında karşılaşılan zorluk ilginçtir. Bu durumu denklem çözmeye çalışan herkes bilir.

Denemesi çok kolay; ortaöğretimde n=2 için öğrendiğimiz yöntemi göz ardı etmeden n=3 için herhangi bir denklemi çözüp çözemediğimize bakabiliriz.